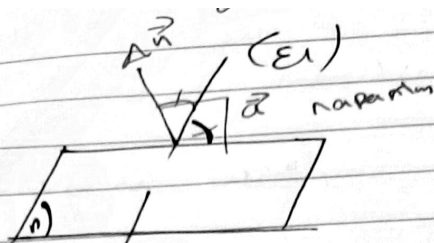
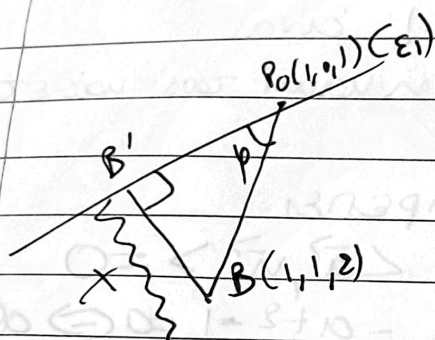


ii)



$$\sin(\angle(E_1, n)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \angle(\vec{a}, \vec{n})\right) = \cos(\angle(\vec{a}, \vec{n})) = \frac{|\langle \vec{a}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{a}\| \|\vec{n}\|}$$

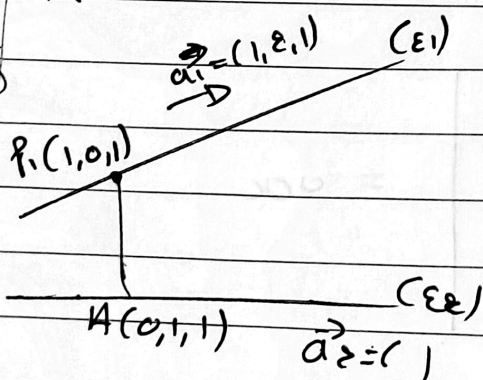


$$d(B, E_1) = d(P, B) \sin \varphi \quad (1)$$

$$\sin \varphi = \sin(\angle(\vec{a}, \vec{PB})) = \frac{\|\vec{a} \times \vec{PB}\|}{\|\vec{a}\| \|\vec{PB}\|} \quad (2)$$

$$d(B, E_1) = \frac{\|\vec{a} \times \vec{PB}\|}{\|\vec{a}\|} = 0$$

iii)



Εμμεν 2 ανμβας

Εξιστάσιν αν ανμβας με κινετο ημερο το ανμβας

$$[P, A, \vec{a}_1, \vec{a}_2] \neq 0$$

(E1)(E2). αρα ανμβας

Κοινη καθετος α) θεωρω ενιμεδο και να περιεχει την (E1) και // E2

με καθετο διευθυνση α και β

β) θεωρω ενιμεδο π' ⊥ π να περιεχει την (E2) δηλ π' // α × (α και β)

g) θεωρήστε την ευθεία

$$(E1) \frac{x-1}{a} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}, \quad a \neq 0 \text{ η οποία είναι}$$

επίσης $\vec{n}_1$ παράδειγμα $\sigma_0 (n_1) : -x + y + z - 1 = 0$

Η ευθεία $(E2)$ διέρχεται από το σημείο

$$A(0, 1, 1) \text{ και είναι } \parallel \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

i) Να βρεθεί ο a και η $(E2)$

ii) Να βρεθεί η μισά $(E1, \Pi)$ $(\Pi) : 4x + 2y + 2z - 1 = 0$ καθώς και την απόσταση $d(B(1, 1, 2), (E1))$.

iii) Να αποδείξετε ότι $(E1), (E2)$ είναι

αυτοκάτοκες και να βρεθεί η καμψή τους κατεύθυνση.

Λύση

i) $\vec{a} = (a, 2, -1) \in (E1)$

$\vec{n}_1 = (-1, 1, 1)$

Πρέπει

$$\langle \vec{a}, \vec{n}_1 \rangle = 0$$

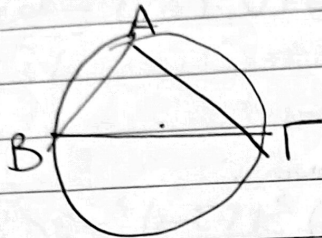
$$-a + 2 = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$(E2): \frac{x-0}{a_1} = \frac{y-1}{\beta_1} = \frac{z-1}{\gamma_1}$$

οπότε

$$(a_1, \beta_1, \gamma_1) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

8) Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ και $\Gamma(2,3,4)$.
Να βρεθούν οι εξισώσεις του περφερμένου κύκλου του. (κύκλος που διέρχεται από κορυφές του τριγώνου).



Λύση:

Έστω (π) το επίπεδο του τριγώνου. Παραγωγώς $\vec{AB} \times \vec{A\Gamma} \perp (\pi)$.

$\vec{AB} \times \vec{A\Gamma} = (0, 4, -5)$. Άρα η εξίσωση του επιπέδου (π) είναι

$$0(x-1) + 4(y-0) - 5(z-0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\pi) \quad 0x + 4y - 5z = 0$$

Τα σημεία O, A, B, Γ δεν είναι συνεπίεδα.
Άρα υπάρχει μοναδική σφαίρα που διέρχεται από αυτά. Η σφαίρα έχει εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

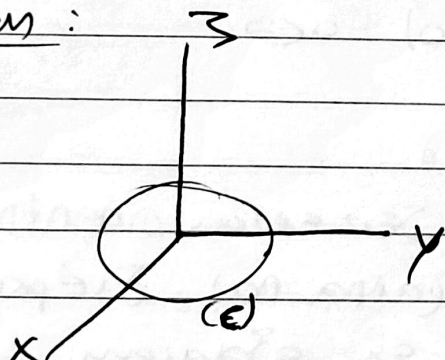
6) Μια σφαίρα έχει κέντρο $\kappa(1, 3, 5)$ και εφάπτεται τω επιπέδω $(\pi): 2x - y + 2z + 3 = 0$.
Να βρεθεί η εξίσωση της σφαίρας.

Λύση: Από υπόθεση πρέπει η ακτίνα της σφαίρας να είναι $R = d(\kappa, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 1 + 2 \cdot 5 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 6$

Άρα η εξίσωση της σφαίρας είναι:
 $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 36$

7) Μια σφαίρα διέρχεται από το σημείο $A(8, 15, 10)$ και τέμνει το επίπεδο οξυ σε κύκλο κέντρου $O(0, 0, 0)$, και ακτίνας 7.
Να βρεθεί η εξίσωση της.

Λύση:



(c): $\begin{cases} z=0 \\ x^2 + y^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 49 \end{cases}$

Κάθε σφαίρα που περιέχει τον κύκλο (c) πρέπει να έχει εξίσωση της μορφής:

$$2(x^2 + y^2 + z^2 - 49) + \mu z = 0, (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

Πρέπει $\lambda(8^2 + 15^2 + 10^2 - 49) + \mu \cdot 10 = 0 \Leftrightarrow$

$$312\lambda + 10\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = -\frac{312\lambda}{10} \quad \lambda \neq 0$$

Η εξίσωση της σφαίρας γίνεται:

$$\lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 49) - \frac{312}{10}\lambda z = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{312z}{10}$$

$$\begin{cases} x=1+t, y=1+t, z=0 \\ 2+2t+2+2t=4 \Rightarrow 4t=13 \Rightarrow t=3/4 \end{cases}$$

Άρα κέντρο του μύλου είναι $M(7/4, 7/4, 0)$

Για τυχόν σημείο P του μύλου το PM είναι ορθόγων με υποσυνωστήρα PC
Από Πυθ. Θεώρημα έχω

$$(d(C, P))^2 = (d(C, M))^2 + r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{p^2 - d(C, M)^2}$$

5) Δίνεται τα σημεία $A(1, 0, 0)$ $B(0, 1, 0)$
 $\Gamma(0, 0, 2)$ $\Delta(1/2, 0, 1/2)$ και $E(1, 2, 3)$

Υπάρχει σφαίρα που να διέρχεται από αυτά τα σημεία; Αν ναι πόσες; Τέτοιες σφαίρες υπάρχουν,

Λύση:

Εξετάζω αν τα A, B, Γ, Δ είναι συνεπίκεντρα, υπολογίζοντας το μιντο πομπέο

$$[\vec{AB}, \vec{A\Gamma}, \vec{A\Delta}] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Άρα από σημεία αυτά διέρχεται μια αμείβως σφαίρα, η οποία έχει εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Εξετάζω αν το E ανήκει στο σύνολο των εξίσωσεων,

H (1) παρουσιάζει σφαίρα (S) κέντρου $\kappa(1,1,0)$ και ακτίνας $\rho=5$

H (2) παρουσιάζει επιπέδο (π) $2x+2y-17=0$

(S)



Υπολογίζω την απόσταση

$$d(\kappa, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 17|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2}}$$

$$\Leftrightarrow d(\kappa, \pi) = \frac{13}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$13 \geq \sqrt{2} \cdot 10 \text{ άρα το } \neq$$

Άρα τα σώματα παρουσιάζουν το κενό

4) Άσκηση

* ίδιο αλλά

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 30$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$$

$$d(\kappa, \pi) = \frac{5}{2\sqrt{2}} < 5 \Leftrightarrow 5 < \sqrt{2} \cdot 10$$

$$\pi: 2x + 2y - 7 = 0$$

Άρα παρουσιάζει

Έστω M το κέντρο του κυκλικού μέρους. κ.μ. κ.μ. κ.μ.

Η ευθεία $\kappa M \perp (\pi) \Rightarrow$

$$\kappa M \parallel \vec{n} = (2, 1, 0)$$

$$(\kappa M) \begin{cases} x-1 & y-1 & z-0 \\ 2 & 1 & 0 \end{cases}$$

Το κέντρο του κυκλικού M είναι το σημείο τομής
 των ευθειών $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 0 \end{cases}$ και του επιπέδου
 (π) $2x + 2y = 7$

$$(n) \quad z = 2$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \mu \end{pmatrix}$$

Υπολογίζω την απόσταση $d(u, (n)) = \frac{|2-2|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = 0$

Άρα μέτρο βρίσκεται
όπως στο ενδεχόμενο.

Άρα το ~~αποτέλεσμα~~^{σύνολο} παριστάνει μέγιστο υπόλοιπο της (ε)

3) Άλλαξη: Τι παριστάνει το ζεύγος των
εξισώσεων

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 2z = 40 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25 \end{cases}$$

Λίαν: Το σύνολο των εξισώσεων αυτών
είναι ισοδύναμο με το:

Διαφορές $\rightarrow$

$$\begin{cases} (1) (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25 \\ (2) (x-1)^2 - x^2 + (y-1)^2 - y^2 = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25 \\ (x-1-x)(x-1+x) + (y-1-y)(y-1+y) = -15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25 \\ 2x-1+2y-1 = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25 \\ 2x+2y = -17 \quad (*) \end{cases}$$

Ασκήσεις

1) Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z + 8 = 0 \quad \text{Τι περιγράφει?}$$

Λύση: $(x^2 - 2x + 1) + y^2 + (z^2 + 2z + 1) + 8 = 0$

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2$$

Είναι σφαίρα κέντρον $K(1, 0, -1)$ και ακτίνας $r = \sqrt{2}$.

2) Άσκηση: Δίνονται τα σημεία $A(5, 2, -1)$ και $B(-3, 4, 7)$. Να βρεθούν η εξίσωση της σφαίρας διαμέτρου AB .

Λύση: Το κέντρο της σφαίρας είναι το μέσο K του ευθ. τμήματος AB .

$$K\left(\frac{5+(-3)}{2}, \frac{-1+7}{2}, \frac{-1+7}{2}\right)$$

Η ακτίνα είναι $r = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

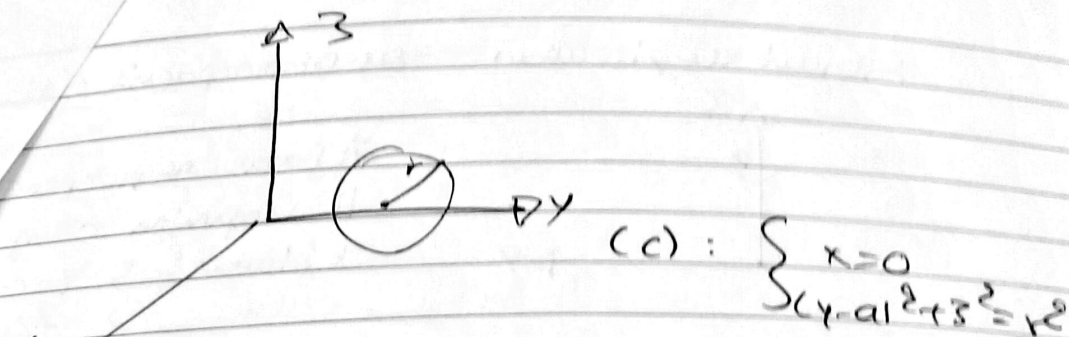
$$r = \sqrt{4^2 + 3^2 + 3^2} \dots$$

$$(x) : (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 4^2 + 3^2 + 3^2$$

3) Άσκηση: Τι περιγράφει το σύστημα των εξισώσεων $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z - 20 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$

Λύση: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z - 20 = 0 \Leftrightarrow$
 $(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 4z + 4) - 20 - 9 - 1 = 0$
 $= 20 + 9 + 1 + 4 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 34$

Αρα σφαίρα
 κέντρον $K(3, -1, 2)$ και
 ακτίνας $r = \sqrt{34}$



Τοπος

Η εξίσωση του τοπου είναι

$$(\pm \sqrt{y^2 + z^2} - a)^2 + z^2 = r^2$$

Αν ηρω από γ θα πάρω σφαιρική.

Παράδειγμα Τι παριστάει η εξίσωση
 $z^{500} + 2z - 7 = x^2 + y^2$.

Λύση: ~~Εξίσωση~~

$$\varphi((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2, \alpha x + \beta y + \gamma z) = 0$$

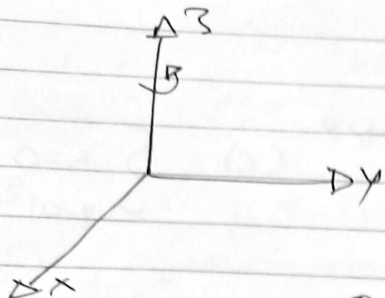
$$(1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \underbrace{z^{500} - z^2 - 2z + 7}_\varepsilon = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x^2 + y^2 + z^2, z) = 0$$

Είναι ευ. περισφαιρική επιφάνεια

Εξίσωση περιπτώσεων

Εν περιπτώσεως επιφάνειας.



Αξονας περιπτώσεως είναι ο z.

Η μαθηματική οδός έχει

$$\text{Εξίσωση} \begin{cases} y=0 \\ f(x,y)=0. \end{cases} \quad (1)$$

Ο υποκαίμενος κύβος έχει εξισώσεις:

$$(c) \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} z=\lambda \\ x^2+y^2+z^2=p^2 \end{cases}$$

Το σύστημα εξ. 1, 2 έχει λύση ως προς x, y, z

$$\begin{cases} y=0, z=\lambda \\ x^2+z^2=p^2 \\ f(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+\lambda^2=p^2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{p^2-\lambda^2}$$

$$f(\pm\sqrt{p^2-\lambda^2}, \lambda)=0$$

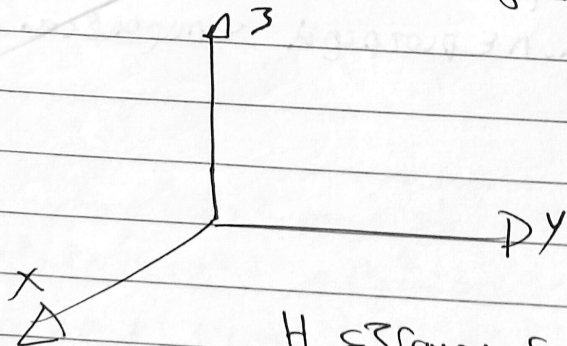
Η εξίσωση της επιφάνειας περιπτώσεως είναι

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2-z^2}, z)=0 \Leftrightarrow f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$$

Αντικατάσταση του x με $\sqrt{x^2+y^2}$ στο z. ~~Σας~~ που δεν μετρά στο z.

Παράδειγμα

ως παίρνω ως άξονα περιπτώσεως το y



$$(c): \begin{cases} z=0 \\ f(x,y)=0 \end{cases}$$

Η εξίσωση εν περιπτώσεως επιφάνειας παίρνω από το ~~α~~ y είναι $f(\sqrt{x^2+z^2}, y)=0$

Παράδειγμα : Να βρεθεί η εξίσωση της
 περιστερας επιφανειας να παρθετα και
 περιστερας της καρπιδης

$$(C) \begin{cases} y = x^3 \\ z = 0 \end{cases}$$

για την επιφάνεια (E): $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$$\text{Λόγος} : (E) \quad \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{0}$$

$\vec{a} = (1, 0, 0) \parallel (E)$ Ο κινούμενος κίνος έχει

$$\text{Εξίσωση} \begin{cases} x = \lambda \\ x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \end{cases}$$

Το σύστημα $\begin{cases} y = x^3, z = 0 \\ x = \lambda, x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \end{cases}$ έχει λύση

$$\begin{cases} z = 0, x = \lambda \\ y = \lambda^3 \\ \lambda^2 + \lambda^6 = \rho^2 \end{cases}$$

Συνεπώς η εξίσωση
 της επιφάνειας είναι

$$x^2 + x^6 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$x^6 = y^2 + z^2$$

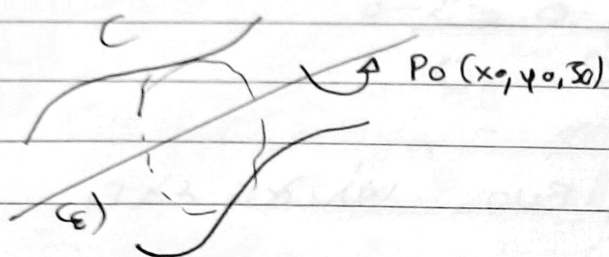
✓

Εξίσωση επιφάνειας.

• Εν περισφαιρής επιφάνειες

Δίνεται ευθεία (ε) $\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$
 και καμπύλη (c) :

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ \gamma(x, y, z) = 0 \end{cases}$$



(ε) καθεύεται άξονας
 περισφαιρής και η (c)
 άξονας καμπύλης

Κάθε σημείο $P \in (c)$ κατανύει τη περισφαιρική
 διαφράση κίνου να το επίπεδο του είναι $\perp (ε)$
 και το κέντρο αυτής συμ (ε).

~~Οι υπαρκτές κίνου άξονας~~

Οι κινούμενες άξον κίνου άξον άξονας

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = \lambda \\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \rho^2 \end{cases}$$

$$\varphi(\rho^2, \lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

Συμπέρασμα : κάθε εν: περισφαιρής επιφάνεια
 δίνεται από εξίσωση της μορφής

$$\varphi((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2, \alpha x + \beta y + \gamma z) = 0$$

↑ εξίσωση

Συμ. περισφαιρής
 επιφάνειας

↑ άξονας || προς α, β, γ
 $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$.

$$\begin{aligned} 3x_1^2 + 5y_1^2 &= 1 \Leftrightarrow \\ (x_1, y_1) &= (x-3, y-2z) \Rightarrow \\ 3(x-3)^2 + 5(y-2z)^2 &= 1 \\ 3(x+3)^2 + 5(y+2z)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Θέλω να βρω
 x, y, z να γράψω

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f(x-3, y-2z) &= 0 \\ f(u, v) &= 3u^2 + 5v^2 - 1 \\ \text{οι δεν είναι } // \begin{cases} x+3=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Τι παριστάνει η εξίσωση
 $(s): y^2 + (3-x)^2 - 4(3-x) = 0,$ βρήκα την

$$\text{Αν άρχω: } (s) \Leftrightarrow f(y, 3-x) = 0,$$

ΜΕ ΕΡΩΤΗΣΗ
ΠΩΣ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ
// ΣΥΣΤΗΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ

$$f(u, v) = u^2 + u^2 - 4u$$

Αρα παριστάνει κυλινδρική επιφάνεια με

$$f \text{ ευεστέρη } // (s) \begin{cases} y=0 \\ 3-x=0 \end{cases}$$

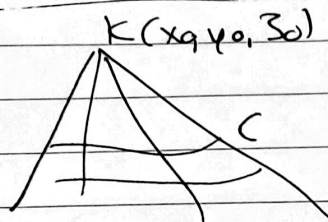
Μία κυλινδρική όψη της (s)

$$\text{Είναι } \begin{cases} y^2 + (3-x)^2 - 4(3-x) = 0 \\ y + 3z = 7 \end{cases}$$

29/5/17

Την παραμέτρηση παρα' είναι:

- Κωνικές επιφάνειες



$$f(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=0$$

όπου $f(u, v, t)$ είναι
αρεσμένη συνάρτηση.

- Κυλινδρικές επιφάνειες

Γενικά η εξίσωση κα' θε κυλινδρικής επιφάνειας
είναι της μορφής

$$f(A_1x+B_1y+Γ_1z+Δ_1, A_2x+B_2y+Γ_2z+Δ_2)=0$$

όπου $f(u, v)$ συνάρτηση

Οι γενέτιμες είναι παραλλήλες προς ευθετα

$$ε: \begin{cases} A_1x+B_1y+Γ_1z+Δ_1=0 \\ A_2x+B_2y+Γ_2z+Δ_2=0 \end{cases}$$

$$A_2x+B_2y+Γ_2z+Δ_2=0$$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η εξίσωση της κυλινδρικής

επιφάνειας της οποίας οι γενέτιμες είναι

// παρ' $\vec{a} = (1, 2, -1)$ και τέμνουν την καμπύλη

$$(c) \begin{cases} 3x^2+5y^2=2 \\ z=0 \end{cases}$$

Ναι: Εστω (ε) τυχαία γεν' της επιφάνειας

$$\text{με } ε) \frac{x-x_1}{x_1} = \frac{y-y_1}{y_1} = \frac{z-z_1}{z_1} \quad \text{όπου } P_1(x_1, y_1, z_1) \in$$

$$\begin{cases} x=x_1+t, & y=y_1+2t, & z=z_1-t \\ 3x^2+5y^2=2 \\ z=0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{έχει λύση} \\ \text{το } (x_1, y_1, z_1) \\ \text{2+20} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=x_1+z_1, & y=y_1+2t, & 3x_1^2+5y_1^2=2 \\ z=0 & z=t & z=-t \end{cases}$$